IN-64
124964

NASA TECHNICAL TRANSLATION

NASA TT-20203

P-12

ESTIMATES OF GREEN TENSORS FOR CERTAIN BOUNDARY VALUE PROBLEMS

V. Solonnikov

Translation of "Ob otsenkakh tenzorov grina dlya nekotorykh krayevykh zadach". Doklady Akademii Nauk SSSR, 1960, Vol. 130, No. 5, pp 988-991

(NASA-TT-20203) ESTIMATES OF GREEN TENSORS FOR CERTAIN BOUNDARY VALUE PROBLEMS (NASA) 12 p CSCL 12A

N88-19172

Unclas
G5/64 0124964

NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION
WASHINGTON D.C. 20546 FEBRUARY 1988

ESTIMATES OF GREEN TENSORS FOR CERTAIN BOUNDARY VALUE PROBLEMS

V. Solonnikov

1. Let us consider the first boundary value problem for a stationary Navier-Stokes system in a bounded three-dimensional region Ω with the boundary S: */988

$$\Delta \mathbf{v} = \operatorname{grad} p + \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v}|_S = 0, \tag{1}$$

Odqvist developed the potential theory and formulated the Green tensor for the problem (1). The basic singular solution has the form

$$v_{ij}(x, y) = \frac{1}{8\pi}\left[\frac{\delta_{ij}}{r_{xy}} + \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{r_{xy}^3}\right], \quad q_j(x, y) = \frac{1}{4\pi}\frac{x_j - y_j}{r_{xy}^3}.$$

The Green tensor formulated by Odqvist is expressed by means of the basic singular solution as follows:

$$G_{ij}(x, y) = v_{ij}(x, y) - \Gamma_{ij}^{y}(x, y), \qquad g_j(x, y) = q_j(x, y) - \gamma_j(x, y),$$

where Γ_{ij}, γ_j satisfy the system

$$\Delta_x \Gamma_{ij}(x, y) = \frac{\partial \gamma_j(x, y)}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial \Gamma_{ij}(x, y)}{\partial x_i} = 0,$$

and the boundary value condition

$$\Gamma_{ij}(\xi, y)|_{\xi \in S} = v_{ij}(\xi, y)|_{\xi \in S}.$$

For G_{ij}, $\partial G_{ij}/\partial x_m$, g_j Odqvist obtained several estimates. A generalization of his results is the following theorem:

Theorem 1. If $S \in \mathrm{Lip}(1, h)$, $0 < h \leqslant 1$, , then

$$|G_{ij}(x, y)| \leqslant \frac{C}{r_{xy}}, \quad \left|\frac{\partial G_{ij}(x, y)}{\partial x_m}\right|, \quad |g_j(x, y)| \leqslant \frac{C}{r_{xy}^2},$$

$$\left.\begin{aligned} &\left|\frac{\partial G_{ij}(x, y)}{\partial x_m} - \frac{\partial G_{ij}(x', y)}{\partial x_m'}\right| \\ &|g_j(x, y) - g_j(x', y)| \end{aligned}\right\} \leqslant \begin{cases} C\left(\dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|}{R^3} + \dfrac{r_{xx'}^h}{R^2}\right), & h < 1 \\ C\left(\dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|}{R^3} + \dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|^2}{R^2}\right), & h = 1, \end{cases}$$

*Numbers in margin indicate pagination of foreign text

ORIGINAL PAGE IS
OF POOR QUALITY

where C--constants depending on S; $R = \min(r_{xy}, r_{x'y})$.

If $S \in \mathrm{Lip}(2, \lambda)$, $0 < \lambda \leqslant 1$, , then

$$\left|\frac{\partial^2 G_{ij}(x,y)}{\partial x_l \partial x_m}\right|, \quad \left|\frac{\partial g_j(x,y)}{\partial x_l}\right| \leqslant \frac{C}{r_{xy}^3},$$

$$\left.\begin{array}{l} \left|\dfrac{\partial^2 G_{ij}(x,y)}{\partial x_l \partial x_m} - \dfrac{\partial^2 G_{ij}(x',y)}{\partial x_l' \partial x_m'}\right| \\ \left|\dfrac{\partial g_j(x,y)}{\partial x_l} - \dfrac{\partial g_j(x',y)}{\partial x_l'}\right| \end{array}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} C\left(\dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|}{R^4} + \dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|^2}{R^3} + \dfrac{r_{xx'}^\lambda}{R^2}\right), & \lambda < 1, \\ C\left(\dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|}{R^4} + \dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|^2}{R^3} + \dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|^3}{R^2}\right), & \lambda = 1, \end{cases}$$

/989

We should note that exactly the same estimates are valid for the Green function for the Dirichlet problem and the Newman function.

Since the solution of problem (1) is expressed using the Green tensor according to formulas

$$v_i(x) = -\int_\Omega G_{ij}(x,y) f_j(y)\, dy, \quad p(x) = -\int_\Omega g_j(x,y) f_j(y)\, dy,$$

using theorem 1 we may prove:

Theorem 2. If $S \in \mathrm{Lip}(1, h)$ u $|\mathbf{f}| \leqslant C$, , then

$$\left|\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i}\right| \leqslant C, \quad \left.\begin{array}{l} \left|\dfrac{\partial \mathbf{v}(x)}{\partial x_i} - \dfrac{\partial \mathbf{v}(x')}{\partial x_i'}\right| \\ |p(x) - p(x')| \end{array}\right\} \leqslant \begin{cases} C r_{xx'}^h, & h < 1, \\ C r_{xx'} |\ln r_{xx'}|^2, & h = 1. \end{cases}$$

If $S \in \mathrm{Lip}(2, \lambda)$, $\mathbf{f} \in \mathrm{Lip}(0, \alpha)$, then

$$\left|\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x_i \partial x_j}\right|, \quad \left|\frac{\partial p}{\partial x_i}\right| \leqslant C \|\mathbf{f}\|_{\mathrm{Lip}(0,\alpha)},$$

$$\left.\begin{array}{l} \left|\dfrac{\partial^2 \mathbf{v}(x)}{\partial x_i \partial x_j} - \dfrac{\partial^2 \mathbf{v}(x')}{\partial x_i' \partial x_j'}\right| \\ \left|\dfrac{\partial p(x)}{\partial x_i} - \dfrac{\partial p(x')}{\partial x_i'}\right| \end{array}\right\} \leqslant \begin{cases} C\|\mathbf{f}\|_{\mathrm{Lip}(0,\alpha)} r_{xx'}^\lambda, & \lambda < \alpha, \\ C\|\mathbf{f}\|_{\mathrm{Lip}(0,\alpha)} r_{xx'}^\alpha |\ln r_{xx'}|, & \alpha \leqslant \lambda < 1, \quad \alpha < \lambda \leqslant 1, \\ C\|\mathbf{f}\|_{\mathrm{Lip}(0,1)} r_{xx'} |\ln r_{xx'}|^3, & \alpha = \lambda = 1. \end{cases}$$

A more general result is given in the references [2].

In addition the following theorem is valid:

Theorem 3. If $S \in C^2$, , then the following inequality holds

$$\| \mathbf{v} \|_{W_p^2(\Omega)} \leqslant C \| \mathbf{f} \|_{L_p(\Omega)}.$$

We should note that a similar estimate for $\| \mathbf{v} \|_{W_p^2(\Omega')}$, where Ω' is any strictly internal subregion of the region Ω, was obtained by O. A. Ladyzhenskaya.

2. In studying the differential properties of the solution of stationary problems of magnetic hydrodynamics, it is necessary to formulate the Green tensor for the following problem

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad H_n|_S = 0, \tag{2}$$

where j--a given solenoidal vector, $H_n|_S = H_i(\xi) n_i(\xi)|_{\xi \in S}$ and Ω--singly-connected region.

Let us also consider the conjugate problem

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{a}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{E}_\tau|_S = 0, \tag{3}$$

where a is the solenoidal vector satisfying the boundary condition $a_n|_S = 0$. $\mathbf{E}_\tau = \mathbf{E} - \mathbf{n} E_n$.

/990

The Green tensors for the problems $V_{ik}(x, y)$ and $U_{ik}(x, y)$, are solutions of the following problems

$$\operatorname{rot}_x \mathbf{V}_k(x, y) = \operatorname{grad}_x \frac{\partial N(x, y)}{\partial y_k} + \mathbf{e}_k \delta(x - y), \quad \operatorname{div}_x \mathbf{V}_k(x, y) = 0,$$

$$V_{k_\tau}(\xi, y)|_{\xi \in S} = 0, \quad \mathbf{V}_k = (V_{1k}, V_{2k}, V_{3k}),$$

$$\operatorname{rot}_x \mathbf{U}_k(x, y) = \operatorname{grad}_x \frac{\partial G(x, y)}{\partial y_k} + \mathbf{e}_k \delta(x - y),$$

$$\operatorname{div}_x \mathbf{U}_k(x, y) = 0, \quad U_{k_n}(\xi, y)|_{\xi \in S} = 0, \ \mathbf{U}_k = (U_{1k}, U_{2k}, U_{3k}),$$

ORIGINAL PAGE IS
OF POOR QUALITY

where N(x, y)--Newman function, G(x, y)--Green function for the Dirichlet problem.

We may readily show that

$$\mathbf{V}_k(x, y) = \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{rot}_x \frac{\mathbf{e}_k}{r_{xy}} + \mathbf{V}'_k(x, y) + \mathrm{grad}_x s_k(x, y),$$

where

$$\mathbf{V}'_k(x, y) = \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{rot}_x \int_S \frac{\partial N(\xi, y)}{\partial y_k} \frac{\mathbf{n}(\xi)}{r_{\xi x}}\, dS_\xi$$

and $s_k(x, y)$ is a solution of the Dirichlet problem.

$$\Delta_x s_k(x, y) = 0, \quad s_k(\xi, y)|_{\xi \in S} = b_k(\xi, y)|_{\xi \in S},$$

and

$$b_k(\xi, y) = -\int_{M_0}^{M(\xi)} \left(\frac{1}{4\pi}\,\mathrm{rot}_\eta \frac{\mathbf{e}_k}{r_{\eta y}} + \mathbf{V}'_k(\eta, y), \overrightarrow{de_\eta}\right);$$

Integration is performed over the contour lying on S. The expression for $b_k(\xi, y)$ makes sense, since

$$\oint_{(l)} \left(\frac{1}{4\pi}\,\mathrm{rot}_\eta \frac{\mathbf{e}_k}{r_{\eta y}} + \mathbf{V}'_k(\eta, y), \overrightarrow{dl_\eta}\right) = 0.$$

In addition,

$$\mathbf{U}_k(x, y) = \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{rot}_x \frac{\mathbf{e}_k}{r_{xy}} + \mathbf{U}'_k(x, y) + \mathrm{grad}_x t_k(x, y),$$

where

$$\mathbf{U}'_k(x, y) = \mathrm{rot}_x \int_S \frac{\partial \rho(\xi, y)}{\partial y_k} \frac{\mathbf{n}(\xi)}{r_{\xi x}}\, dS_\xi,$$

$\rho(\xi, y)$ is the potential density of a double layer, by means of which a regular part of the function G(x, y) is expressed, and $t_k(x, y)$ is the solution of the Newman problem

$$\Delta t_k(x, y) = 0,$$

$$\left.\frac{\partial t_k(\xi, y)}{\partial n_\xi}\right|_{\xi \in S} = -\left.\frac{1}{4\pi}\,\mathrm{rot}_n \frac{\mathbf{e}_k}{r_{\xi y}} + U'_{k_n}(\xi, y)\right|_{\xi \in S}.$$

The following relationship exists between V_{ik} and U_{ik}

$$V_{ik}(x, y) = U_{ki}(y, x).$$

ORIGINAL PAGE IS
OE POOR QUALITY

The solutions of problems (2), (3) are expressed using V_{ik} /991 and U_{ik} as follows:

$$H_k(x) = \int_\Omega j_i(y) V_{ik}(y, x)\, dy = \int_\Omega U_{ki}(x, y)\, j_i(y) dy,$$
$$E_k(x) = \int_\Omega a_i(y) U_{ik}(y, x)\, dy = \int_\Omega V_{ki}(x, y)\, a_i(y)\, dy.$$

Theorem 4. If $S \in \mathrm{Lip}(1, h)$, , then

$$|U_{ik}(x, y)|, \quad |V_{ik}(x, y)| \leqslant \frac{2C}{r_{xy}^2},$$
$$\left.\begin{aligned} &|U_{ik}(x, y) - U_{ik}(x', y)| \\ &|V_{ik}(x, y) - V_{ik}(x', y)| \end{aligned}\right\} \leqslant \begin{cases} C\left(\dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|}{R^3} + \dfrac{r_{xx'}^{h\,3}}{R^3}\right), & h < 1, \\ C\left(\dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|}{R^3} + \dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|^3}{R^3}\right), & h = 1, \end{cases}$$

where $R = \min(r_{xy}, r_{x'y})$.

If $S \in \mathrm{Lip}(2, \lambda)$, , then

$$\left|\frac{\partial U_{ik}(x, y)}{\partial x_l}\right|, \quad \left|\frac{\partial V_{ik}}{\partial x_l}\right| \leqslant \frac{C}{r_{xy}^3},$$
$$\left.\begin{aligned} &\left|\frac{\partial U_{ik}(x, y)}{\partial x_l} - \frac{\partial U_{ik}(x', y)}{\partial x_l'}\right| \\ &\left|\frac{\partial V_{ik}(x, y)}{\partial x_l} - \frac{\partial V_{ik}(x', y)}{\partial x_l'}\right| \end{aligned}\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \begin{cases} C\left(\dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|}{R^4} + \dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|^2}{R^3} + \dfrac{r_{xx'}^{\lambda}}{R^2}\right), & \lambda < 1, \\ C\left(\dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|}{R^4} + \dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|^2}{R^3} + \dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|^3}{R^2}\right), & \lambda = 1. \end{cases}$$

Using these estimates we may prove:

Theorem 5. If $S \in \mathrm{Lip}(1, h)$ and $|\mathbf{j}| \leqslant C$, then the solution of the problem (1) satisfies the conditions

$$|\mathbf{H}| \leqslant C, \quad |\mathbf{H}(x) - \mathbf{H}(x')| \leqslant \begin{cases} Cr_{xx'}^h, & h < 1, \\ Cr_{xx'}|\ln r_{xx'}|^2, & h = 1. \end{cases}$$

If $S \in \mathrm{Lip}(2, \lambda)$ and $\mathbf{j} \in \mathrm{Lip}(0, \alpha)$, , then

ORIGINAL PAGE IS
OF POOR QUALITY

$$\left|\frac{\partial H}{\partial x_l}\right| \leqslant C \|j\|_{\mathrm{Lip}(0,\alpha)},$$

$$\left|\frac{\partial H(x)}{\partial x_l} - \frac{\partial H(x')}{\partial x_l'}\right| \leqslant \begin{cases} C\|j\|_{\mathrm{Lip}(0,\alpha)} r_{xx'}^{\lambda}, & \lambda < \alpha, \\ C\|j\|_{\mathrm{Lip}(0,\alpha)} r_{xx'}^{\alpha} |\ln r_{xx'}|, & \alpha \leqslant \lambda < 1, \quad \alpha < \lambda \leqslant 1, \\ C\|j\|_{\mathrm{Lip}(0,\alpha)} r_{xx'} |\ln r_{xx'}|^3, & \alpha = \lambda = 1. \end{cases}$$

This theorem is exactly valid for problem 2.

REFERENCES

1. F. K. G. Odqvist, Math. Zs., 32, H. 3, 329 (1930).
2. I.I. Voronich, V.I. Yudovich, DAN, 124, No. 3, 1959.

Доклады Академии наук СССР
1960. Том 130, № 5

TT 20203
(632, -991)

МАТЕМАТИКА

В. СОЛОННИКОВ

ОБ ОЦЕНКАХ ТЕНЗОРОВ ГРИНА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 19 X 1959)

1. Рассмотрим первую краевую задачу для стационарной системы Навье — Стокса в ограниченной трехмерной области Ω с границей S:

$$\Delta \mathbf{v} = \operatorname{grad} p + \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v}|_S = 0. \tag{1}$$

Одквист (1) развил теорию потенциала и построил тензор Грина для задачи (1). Основное сингулярное решение имеет вид

$$v_{ij}(x, y) = \frac{1}{8\pi}\left[\frac{\delta_{ij}}{r_{xy}} + \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{r_{xy}^3}\right], \quad q_j(x, y) = \frac{1}{4\pi}\frac{x_j - y_j}{r_{xy}^3}.$$

Построенный Одквистом тензор Грина выражается с помощью основного сингулярного решения следующим образом:

$$G_{ij}(x, y) = v_{ij}(x, y) - \Gamma_{ij}^{y}(x, y), \qquad g_j(x, y) = q_j(x, y) - \gamma_j(x, y),$$

где Γ_{ij}, γ_j удовлетворяют системе

$$\Delta_x \Gamma_{ij}(x, y) - \frac{\partial \gamma_j(x, y)}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial \Gamma_{ij}(x, y)}{\partial x_i} = 0,$$

и краевому условию

$$\Gamma_{ij}(\xi, y)|_{\xi \in S} = v_{ij}(\xi, y)|_{\xi \in S}.$$

Для G_{ij}, $\partial G_{ij}/\partial x_m$, g_j Одквистом получен ряд оценок. Обобщением его результатов является следующая теорема:

Теорема 1. *Если* $S \in \operatorname{Lip}(1, h)$, $0 < h \leqslant 1$, *то*

$$|G_{ij}(x, y)| < \frac{C}{r_{xy}}, \quad \left|\frac{\partial G_{ij}(x, y)}{\partial x_m}\right|, \quad |g_j(x, y)| < \frac{C}{r_{xy}^2},$$

$$\left.\begin{array}{l} \left|\dfrac{\partial G_{ij}(x, y)}{\partial x_m} - \dfrac{\partial G_{ij}(x', y)}{\partial x_m}\right| \\ |g_j(x, y) - g_j(x', y)| \end{array}\right\} < \begin{cases} C\left(\dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|}{R^3} + \dfrac{r_{xx'}^h}{R^2}\right), & h < 1 \\ C\left(\dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|}{R^3} + \dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|^2}{R^2}\right), & h = 1, \end{cases}$$

где C — *постоянные, зависящие от* S; $R = \min(r_{xy}, r_{x'y})$.

Если же $S \in \operatorname{Lip}(2, \lambda)$, $0 < \lambda < 1$, *то*

$$\left|\frac{\partial^2 G_{ij}(x, y)}{\partial x_l \partial x_m}\right|, \quad \left|\frac{\partial g_j(x, y)}{\partial x_l}\right| < \frac{C}{r_{xy}^3}.$$

ORIGINAL PAGE IS
OF POOR QUALITY

$$\left.\begin{array}{l}\left|\dfrac{\partial^2 G_{ij}(x,y)}{\partial x_l \partial x_m} - \dfrac{\partial^2 G_{ij}(x',y)}{\partial x_l' \partial x_m'}\right| \\ \left|\dfrac{\partial g_j(x,y)}{\partial x_l} - \dfrac{\partial g_j(x',y)}{\partial x_l'}\right|\end{array}\right\} \leqslant$$

$$\begin{cases} C\left(\dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|}{R^4} + \dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|^2}{R^3} + \dfrac{r_{xx'}^{\lambda}}{R^3}\right), & \lambda < 1, \\ C\left(\dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|}{R^4} + \dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|^2}{R^3} + \dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|^3}{R^3}\right), & \lambda = 1. \end{cases}$$

Отметим, что точно такие же оценки справедливы для функции Грина для задачи Дирихле и функции Неймана.

Так как решение задачи (1) выражается с помощью тензора Грина по формулам

$$v_i(x) = -\int_\Omega G_{ij}(x,y) f_j(y)\, dy, \quad p(x) = -\int_\Omega g_j(x,y) f_j(y)\, dy,$$

то при помощи теоремы 1 может быть доказана

Теорема 2. *Если* $S \in \mathrm{Lip}(1,h)$ *и* $|\mathbf{f}| \leqslant C$, *то*

$$\left.\begin{array}{l}\left|\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i}\right| \leqslant C, \quad \left|\dfrac{\partial \mathbf{v}(x)}{\partial x_i} - \dfrac{\partial \mathbf{v}(x')}{\partial x_i'}\right| \\ |p(x) - p(x')|\end{array}\right\} \leqslant \begin{cases} C r_{xx'}^h, & h < 1, \\ C r_{xx'} |\ln r_{xx'}|^2, & h = 1. \end{cases}$$

Если же $S \in \mathrm{Lip}(2,\lambda)$, $\mathbf{f} \in \mathrm{Lip}(0,\alpha)$, *то*

$$\left|\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x_i \partial x_j}\right|, \quad \left|\frac{\partial p}{\partial x_i}\right| \leqslant C \|\mathbf{f}\|_{\mathrm{Lip}(0,\alpha)},$$

$$\left.\begin{array}{l}\left|\dfrac{\partial^2 \mathbf{v}(x)}{\partial x_i \partial x_j} - \dfrac{\partial^2 \mathbf{v}(x')}{\partial x_i' \partial x_j'}\right| \\ \left|\dfrac{\partial p(x)}{\partial x_i} - \dfrac{\partial p(x')}{\partial x_i'}\right|\end{array}\right\} \leqslant \begin{cases} C\|\mathbf{f}\|_{\mathrm{Lip}(0,\alpha)} r_{xx'}^{\lambda}, & \lambda < \alpha, \\ C\|\mathbf{f}\|_{\mathrm{Lip}(0,\alpha)} r_{xx'}^{\alpha} |\ln r_{xx'}|, & \alpha \leqslant \lambda < 1, \quad \alpha < \lambda \leqslant 1, \\ C\|\mathbf{f}\|_{\mathrm{Lip}(0,1)} r_{xx'} |\ln r_{xx'}|^2, & \alpha = \lambda = 1. \end{cases}$$

Более общий результат приведен в заметке (2).

Кроме того, справедлива следующая теорема:

Теорема 3. *Если* $S \in C^2$, *то имеет место неравенство*

$$\|\mathbf{v}\|_{W_p^2(\Omega)} \leqslant C \|\mathbf{f}\|_{L_p(\Omega)}.$$

Отметим, что аналогичная оценка для $\|\mathbf{v}\|_{W_2^2(\Omega')}$, где Ω' — любая строго внутренняя подобласть области Ω, получена О. А. Ладыженской.

2. При исследовании дифференциальных свойств решения стационарных задач магнитной гидродинамики встречается необходимость построить тензор Грина для следующей задачи

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0, \quad H_n|_S = 0, \tag{2}$$

где $\mathbf{j}$ — заданный соленоидальный вектор, $H_n|_S = H_i(\xi) n_i(\xi)|_{\xi \in S}$ и Ω — односвязная область.

Рассмотрим также сопряженную задачу

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = \mathbf{a}, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{E}_\tau|_S = 0, \tag{3}$$

где $\mathbf{a}$ — соленоидальный вектор, удовлетворяющий граничному условию $a_n|_S = 0$, и $\mathbf{E}_\tau = \mathbf{E} - \mathbf{n}E_n$.

ORIGINAL PAGE IS
OF POOR QUALITY

Тензоры Грина для задач (2), (3), $V_{ik}(x, y)$ и $U_{ik}(x, y)$, являются решениями следующих задач:

$$\mathrm{rot}_x \mathbf{V}_k(x, y) = \mathrm{grad}_x \frac{\partial N(x, y)}{\partial y_k} + \mathbf{e}_k \delta(x - y), \quad \mathrm{div}_x \mathbf{V}_k(x, y) = 0,$$

$$\mathbf{V}_{k_\tau}(\xi, y)|_{\xi \in S} = 0, \quad \mathbf{V}_k = (V_{1k}, V_{2k}, V_{3k}),$$

$$\mathrm{rot}_x \mathbf{U}_k(x, y) = \mathrm{grad}_x \frac{\partial G(x, y)}{\partial y_k} + \mathbf{e}_k \delta(x - y),$$

$$\mathrm{div}_x \mathbf{U}_k(x, y) = 0, \quad U_{k_n}(\xi, y)|_{\xi \in S} = 0, \ \mathbf{U}_k = (U_{1k}, U_{2k}, U_{3k}),$$

где $N(x, y)$ — функция Неймана, $G(x, y)$ — функция Грина для задачи Дирихле.

Легко проверить, что

$$\mathbf{V}_k(x, y) = \frac{1}{4\pi} \mathrm{rot}_x \frac{\mathbf{e}_k}{r_{xy}} + \mathbf{V}_k'(x, y) + \mathrm{grad}_x s_k(x, y),$$

где

$$\mathbf{V}_k'(x, y) = \frac{1}{4\pi} \mathrm{rot}_x \int_S \frac{\partial N(\xi, y)}{\partial y_k} \frac{\mathbf{n}(\xi)}{r_{\xi x}} dS_\xi$$

и $s_k(x, y)$ является решением задачи Дирихле:

$$\Delta_x s_k(x, y) = 0, \quad s_k(\xi, y)|_{\xi \in S} = b_k(\xi, y)|_{\xi \in S},$$

причем

$$b_k(\xi, y) = -\int_{M_0}^{M(\xi)} \left(\frac{1}{4\pi} \mathrm{rot}_\eta \frac{\mathbf{e}_k}{r_{\eta y}} + \mathbf{V}_k'(\tau_\eta, y), \overrightarrow{d\tau_\eta} \right);$$

интегрирование ведется по контуру, лежащему на S. Выражение для $b_k(\xi, y)$ имеет смысл, так как

$$\oint_{(L)} \left(\frac{1}{4\pi} \mathrm{rot}_\eta \frac{\mathbf{e}_k}{r_{\eta y}} + \mathbf{V}_k'(\tau_\eta, y), \overrightarrow{d\tau_\eta} \right) = 0.$$

Далее,

$$\mathbf{U}_k(x, y) = \frac{1}{4\pi} \mathrm{rot}_x \frac{\mathbf{e}_k}{r_{xy}} + \mathbf{U}_k'(x, y) + \mathrm{grad}_x t_k(x, y),$$

где

$$\mathbf{U}_k'(x, y) = \mathrm{rot}_x \int_S \frac{\partial p(\xi, y)}{\partial y_k} \frac{\mathbf{n}(\xi)}{r_{\xi x}} dS_\xi,$$

$p(\xi, y)$ — плотность потенциала двойного слоя, при помощи которого выражается регулярная часть функции $G(x, y)$, а $t_k(x, y)$ — решение задачи Неймана

$$\Delta t_k(x, y) = 0,$$

$$\left. \frac{\partial t_k(\xi, y)}{\partial n_\xi} \right|_{\xi \in S} = -\frac{1}{4\pi} \mathrm{rot}_n \frac{\mathbf{e}_k}{r_{\xi y}} + U_{k_n}'(\xi, y)|_{\xi \in S}.$$

Между V_{ik} и U_{ik} существует соотношение

$$V_{ik}(x, y) = U_{ki}(y, x).$$

ORIGINAL PAGE IS
OF POOR QUALITY

Решения задач (2), (3) выражаются при помощи V_{ik} и U_{ik} следующим образом:

$$H_k(x) = \int_\Omega j_i(y) V_{ik}(y, x)\, dy = \int_\Omega U_{ki}(x, y)\, j_i(y) dy,$$

$$E_k(x) = \int_\Omega a_i(y) U_{ik}(y, x)\, dy = \int_\Omega V_{ki}(x, y)\, a_i(y)\, dy.$$

Теорема 4. *Если* $S \in \mathrm{Lip}(1, h)$, *то*

$$|U_{ik}(x, y)|,\quad |V_{ik}(x, y)| \leqslant \frac{\tilde{c}C}{r_{xy}^2},$$

$$\left.\begin{array}{l} |U_{ik}(x, y) - U_{ik}(x', y)| \\ |V_{ik}(x, y) - V_{ik}(x', y)| \end{array}\right\} \leqslant \begin{cases} C\left(\dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|}{R^3} + \dfrac{r_{xx'}^h}{R^3}\right), & h < 1, \\ C\left(\dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|}{R^3} + \dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|^2}{R^3}\right), & h = 1, \end{cases}$$

где $R = \min(r_{xy}, r_{x'y})$.

Если же $S \in \mathrm{Lip}(2, \lambda)$, *то*

$$\left|\frac{\partial U_{ik}(x, y)}{\partial x_l}\right|,\quad \left|\frac{\partial V_{ik}}{\partial x_l}\right| \leqslant \frac{C}{r_{xy}^3},$$

$$\left.\begin{array}{l} \left|\dfrac{\partial U_{ik}(x, y)}{\partial x_l} - \dfrac{\partial U_{ik}(x', y)}{\partial x_l}\right| \\ \left|\dfrac{\partial V_{ik}(x, y)}{\partial x_l} - \dfrac{\partial V_{ik}(x', y)}{\partial x_l}\right| \end{array}\right\} \leqslant$$

$$\begin{cases} C\left(\dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|}{R^4} + \dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|^2}{R^3} + \dfrac{r_{xx'}^\lambda}{R^3}\right), & \lambda < 1, \\ C\left(\dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|}{R^4} + \dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|^2}{R^3} + \dfrac{r_{xx'}|\ln r_{xx'}|^3}{R^3}\right), & \lambda = 1. \end{cases}$$

При помощи этих оценок может быть доказана

Теорема 5. *Если* $S \in \mathrm{Lip}(1, h)$ *и* $|\mathbf{j}| \leqslant C$, *то решение задачи* (1) *удовлетворяет условиям:*

$$|\mathbf{H}| \leqslant C,\quad |\mathbf{H}(x) - \mathbf{H}(x')| \leqslant \begin{cases} Cr_{xx'}^h, & h < 1, \\ Cr_{xx'}|\ln r_{xx'}|^2, & h = 1. \end{cases}$$

Если же $S \in \mathrm{Lip}(2, \lambda)$ *и* $\mathbf{j} \in \mathrm{Lip}(0, \alpha)$, *то*

$$\left|\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_l}\right| \leqslant C\|\mathbf{j}\|_{\mathrm{Lip}(0, \alpha)},$$

$$\left|\frac{\partial \mathbf{H}(x)}{\partial x_l} - \frac{\partial \mathbf{H}(x')}{\partial x_l}\right| \leqslant \begin{cases} C\|\mathbf{j}\|_{\mathrm{Lip}(0, \alpha)} r_{xx'}^\lambda, & \lambda < \alpha, \\ C\|\mathbf{j}\|_{\mathrm{Lip}(0, \alpha)} r_{xx'}^\alpha |\ln r_{xx'}|, & \alpha \leqslant \lambda < 1, \quad \alpha < \lambda \leqslant 1, \\ C\|\mathbf{j}\|_{\mathrm{Lip}(0, \alpha)} r_{xx'}^\alpha |\ln r_{xx'}|^2, & \alpha = \lambda = 1. \end{cases}$$

Точно такая же теорема справедлива для задачи 2.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
10 X 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] F. K. G. Odqvist, Math. Zs., 32, H. 3, 329 (1930). [2] Н. Н. Воронич, В. Н. Юдович, ДАН, 124, № 3 (1959).

ORIGINAL PAGE IS
OF POOR QUALITY